Adı Soyadı:
Numarası:

05.07.2022

2021-2022 BAHAR DÖNEMİ CEBİR II BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) a) Öklid bölgesi, Temel İdeal bölgesi, İdeal, Kesir cismi kavramlarını tanımlayınız.

b) Bir halkada x, y ve z ile ayrı ayrı değişmeli ise x'in $y+z$ ve $ny(n\in\mathbb{Z})$ ile de değişmeli olduğunu gösteriniz.

2) a) R en az iki elemanlı regüler halka ve her $x\in R$ için $x=xyx$ olacak şekilde bir tek $y\in R$ varsa R halkası birimlidir, gösteriniz.

b) R bir Öklid bölgesi olsun. R'nin Temel İdeal Bölgesi olduğunu gösteriniz.

3) a) $p\in\mathbb{Z}$ asal tam sayı olsun. $p\mathbb{Z}$ ideali asal mıdır? Araştırınız.

b) K karakteristiği c (c tek tam sayı) olan birimli ve değişmeli bir halka olsun.

$$L=\left\{a\in K \mid a^{c-1}=1\right\}$$

olmak üzere L, K'nin ideali olur mu? Araştırınız.

4) $\mathbb{Z}/(7)\times\mathbb{Z}/(10)\cong\mathbb{Z}/(70)$ olduğunu gösteriniz.

5) a) $\mathbb{Z}_{11}[x]$ de $f(x)=3x^3+2x^2+1$ ve $g(x)=2x^5+7x^3+5x^2+4x+3$ polinomları için $d(x)$, bu polinomların ebobu olmak üzere $d(x)$ polinomunu bulunuz.

b) $x^5-3x^4+3x^3-7x^2+5x-1\in\mathbb{Z}[x]$ polinomunun asal olup olmadığını belirtiniz. Eğer asal değilse asal çarpanlarına ayırınız.

Başarılar...

Cebir II Bütünleme Sınavı Cevap Anahtarı

1) a) Tanımlar ders notlarında mevcuttur

b) x, y ve z ile değişmeli olsun. O halde

$xy = yx$ ve $x.z = zx$ yazılabilir.

Biz x'in $y+z$ ile ve ny ile değişmeli old. gösterelim.

$x(y+z) = xy + xz = yx + zx = (y+z).x$

$x(ny) = n(xy) = n.(yx) = (ny).x$

2) a) Ders notlarında mevcuttur

b) Ders notlarında mevcuttur

3.) a) $p\mathbb{Z} = \{pk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ old. biliyoruz

$p\mathbb{Z}$ idealinin asal olması için $a,b \in \mathbb{Z}$, $ab \in p\mathbb{Z}$ olsun. $p \mid ab$ ve $p \nmid a$ ise $(p,a) = 1$ olur

$(p,a) = 1 \Rightarrow px + ay = 1$ o.ş. $\exists x,y \in \mathbb{Z}$ var

$\Rightarrow bpx + aby = b$

$\Rightarrow p \mid b$

Yani $p\mathbb{Z}$ asal idealdir

3 b) K karakteristiği c olan bir Tamlık bölgesi (c tek tam sayı) olsun. $L = \{a \in K \mid a^{c-1} = 1\}$ ise L, K'nın ideali olur mu?

$L \neq \emptyset$: K, birimlidir $1 \in K$ dır.
$1^{c-1} = 1$ old. $1 \in L$ olup $L \neq \emptyset$
$L \subseteq K$: L'nin tanımından açıktır.

* $\forall a, b \in L$ için $a-b \in L$ olur mu?
$a, b \in L \Rightarrow a^{c-1} = 1 \Rightarrow a^c = a \wedge b^c = b$ bulunur.
$(a-b)^c = a^c - \binom{a}{1} a^{c-1} \cdot b + \binom{a}{2} a^{c-2} b^2 - \dots - b^c$
$= a - b \Rightarrow (a-b)^{c-1} = 1 \Rightarrow a-b \in L$

* $\forall r \in K$, $\forall a \in L$ için $ra \in L$ ve ~~ar~~ $\in L$ olur mu?
$(ra)^c = r^c \cdot a^c$ yazılabilir Çünkü K değişmelidir
$(ra)^{c-1} = 1$ olur mu? Yani $(ra)^c = ra$ olur mu?
$\forall r \in K$ için $r^c \neq r$ old. $(ra)^c \neq ra$ yani $(ra)^{c-1} \neq 1$ olup $ra \notin L$. O halde L, K'nın ideali olmaz

4) $\mathbb{Z}/(7) \times \mathbb{Z}/(10) \cong \mathbb{Z}/(70)$ old gösterelim.

Bunun için homomorfizma teoremini kullanalım.

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(7) \times \mathbb{Z}/(10)$
$a \to f(a) = (a+(7), a+(10))$

dönüşümünü tanımlayalım.
f kapalıdır: $\forall a \in \mathbb{Z}$ için $f(a) = (a+(7), a+(10)) \in \mathbb{Z}/(7) \times \mathbb{Z}/(10)$
f iyi tanımlıdır: $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ $a_1 = a_2$ alınırsa
$f(a_1) = (a_1+(7), a_1+(10)) = (a_2+(7), a_2+(10)) = f(a_2)$
bulunur Yani f bir fonksiyondur

4'ün devamı

f homomorfizmadır: $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ için

$$f(a+b) = (a+b+(7),\ a+b+(10))$$
$$= (a+(7)+b+(7),\ a+(10)+b+(10))$$
$$= (a+(7),\ a+(10)) + (b+(7),\ b+(10))$$
$$= f(a)+f(b)$$

$$f(ab) = (ab+(7),\ ab+(10))$$
$$= ((a+(7))(b+(7)),\ (a+(10))(b+(10)))$$
$$= f(a)\cdot f(b)$$

f örtendir: $\forall (a+(7), b+(10)) \in \mathbb{Z}/_{(7)} \times \mathbb{Z}/_{(10)}$ için

$a,b\in\mathbb{Z}$ olup

$\mathbb{Z}=(7)+(10)$ alınırsa $\left.\begin{array}{l} a=7x'+10y' \\ b=7x''+10y'' \end{array}\right\}$ o.ş. $x',y',x'',y''\in\mathbb{Z}$ vardır

$\forall (a+(7), b+(10)) \in \mathbb{Z}/_{(7)}\times\mathbb{Z}/_{(10)}$ için

O halde $x=7x''+10y'$ alınırsa

$$f(x) = (10y'+(7),\ 7x''+(10)) = (a+(7),\ b+(10))$$

o.ş. $\exists x\in\mathbb{Z}$ vardır.

$$\text{Çek} f = \{a\in\mathbb{Z} \mid f(a) = ((7),(10))\}$$
$$= \{a\in\mathbb{Z} \mid (a+(7),\ a+(10)) = ((7),(10))\}$$
$$= \{a\in\mathbb{Z} \mid (a+(7))=(7) \wedge a+(10)=(10)\}$$
$$= \{a\in\mathbb{Z} \mid a\in(7) \wedge a\in(10)\}$$
$$= \{a\in\mathbb{Z} \mid a=7k \wedge \cancel{a=}10t,\ k,t\in\mathbb{Z}\}$$
$$= \{70u \mid u\in\mathbb{Z}\} = (70)$$

Homomorfizma teo göre

$$\mathbb{Z}/_{\text{Çek}f} \cong \mathbb{Z}/_{(7)} \times \mathbb{Z}/_{(10)}$$

$$\mathbb{Z}/_{(70)} \cong \mathbb{Z}/_{(7)} \times \mathbb{Z}/_{(10)}$$

5 a) $\mathbb{Z}_{11}[x]$ de $f(x)=3x^3+2x^2+1$ ve

$$g(x)=2x^5+7x^3+5x^2+4x+3$$

için $g(x)$'i $f(x)$ ile bölersek

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^5}+7x^3+5x^2+4x+3 & 3x^3+2x^2+1 \\ \hline -\cancel{2x^5}\mp 5x^4 \mp 8x^2 & 8x^2+2x+1 \end{array}$$

$$\cancel{6x^4}+7x^3+8x^2+4x+3$$
$$-\cancel{6x^4}\mp 4x^3 \mp 2x$$
$$3x^3+8x^2+2x+3$$
$$-3x^3\mp 2x^2 \mp 1$$
$$6x^2+2x+2$$

$$g(x)=f(x).(8x^2+2x+1)+(6x^2+2x+2)$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{3x^3}+2x^2+1 & 6x^2+2x+2 \\ \hline -\cancel{3x^3}\mp x^2 \mp x & 6x+2 \end{array}$$

$$\cancel{x^2}-x+1$$
$$-\cancel{x^2}\mp 4x \mp 4$$
$$6x-3$$

$$f(x)=(6x^2+2x+2).(6x+2)+(6x-3)$$

$$\begin{array}{l|l} 6x^2+2x+2 & 6x-3 \\ \hline -6x^2\mp 3x & x+10 \end{array}$$

$$\cancel{5x}+2$$
$$-\cancel{5x}\mp 3$$
$$10$$

$$6x^2+2x+2=(6x-3).(x+10)+10$$

$$\begin{array}{l|l} 6x-3 & 10 \\ \hline -6x & 5x \end{array}$$

$$+8$$

$$6x-3 = 10.(5x)+8$$
$$10 = 8.1+\boxed{2}$$
$$8 = 4.2+0$$

O halde $d(x)=2$ bulunur.

5b) $x^5-3x^4+3x^3-7x^2+5x-1 \in \mathbb{Z}[x]$ asal olur mu? Değilse asal çarpanlarına ayıralım.

Çözüm: Öncelikle rasyonel kök teo. göre

$u \mid -1,\ v \mid 1 \Rightarrow \frac{u}{v} = \{\pm 1\}$ olup polinoma f denirse $f(1) \neq 0$

$f(-1) \neq 0$ olup 1. dereceden çarpanı yoktur

O halde çarpanları $(x^2+ax+b)(x^3+cx^2+dx+e)$ biçiminde olabilir.

$$x^5-3x^4+3x^3-7x^2+5x-1 = (x^2+ax+b)(x^3+cx^2+dx+e)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} c+a&=-3 \\ d+ac+b&=3 \\ e+ad+bc&=-7 \\ ae+bd&=5 \\ be&=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$b=1$ $e=-1$ alınırsa

$$\left.\begin{aligned} d-a&=5 \\ d+ac&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5+a=2-ac$$

$\Rightarrow a+ac=-3$

$\Rightarrow a(\underbrace{1+c}_{1})=-3$

$\boxed{a=-3}$

$\boxed{c=0}$

$\boxed{d=2}$

O halde polinom $\mathbb{Q}[x]$ de ve ilkel old. $\mathbb{Z}[x]$ de asal değildir. Asal çarpanları $(x^2-3x+1)(x^3+2x-1)$ olarak bulunur.

Scanned with CamScanner